一种基于拉格朗日反演的级数函数单调区间估计及非零实根的求解方法

罗天巡

（北京控制工程研究所 100094）

摘要：本文利用拉格朗日反演级数方法，研究了形如级数$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$的在$x=0$的邻域内单调区间，然后针对更一般形式的级数方程，给出了其中一个非零实根的一个计算方法。

关键词：拉格朗日反演级数；实根

分类号：O211.4

A Lagrange Inversion Based Method for Solving the Non-zero Real Roots and the Monotone Interval Estimation of Series Functions

Luotianxun

(Beijing Institute of Control Engineering,100094,China)

Abstract: In this paper, we first study the monotone intervals in the neighborhood of $x=0$ for the series $y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$ by using the Lagrange inversion series method. Then, for the more general series equation, we give a calculation method of the nonzero and minimum real roots.

Keywords: Lagrangian inversion series; Solid root

1.首项系数不为零的级数方程单调区间及其导数的实根

这里首先给出级数：

$$y=f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,a_1\neq0,x\in\Theta \qquad (1)$$

(Θ 为该级数收敛域) 的拉格朗日反演级数公式：不妨记$\psi(x)=a_1+a_2x^1+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots$，则式（1）的反演级数为：

$$x=\frac{1}{\psi(x)}y=\frac{1}{\psi(0)}y+\frac{1}{2!}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{(\psi(x))^2}\right]_{x=0}y^2+\ldots+$$

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{(\psi(x))^n}\right]_{x=0} y^n + \ldots$$ [1]

(2)

本文出于书写简化方便，将y^n项系数（为常数）表示为b_n，即

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{(\psi(x))^n}\right]_{x=0} \quad (3)$$

因此式（1）的反演级数可简化表示为：

$$x = h(y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + \ldots \quad (4)$$

由于本文论述的重点在于反演级数的单调区间和实根情况，因此不妨假设式（1）的关于 x 的收敛域包含由式（4）确定的 x 的收敛域。

引理 1：若形如级数（1）在$x = 0$的邻域内解析且存在拉格朗日反演级数（4），则$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$存在。

证明：由于该级数在$x = 0$的邻域内解析且存在拉格朗日反演级数，因此存在$y = 0$的邻域[2]满足$\lim_{n\to\infty} b_n y^n = 0$（这是因为，由于该级数收敛，当 y 很接近 0，$x = b_1 y + \ldots + b_{n-1} y^{n-1} + o(y^n)$，即$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} b_i y^i = 0$，因此$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i y^i = 0$，故$\lim_{n\to\infty} b_n y^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i y^i - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} b_i y^i = 0$）。

因此在$y = 0$的邻域内，当 y 固定时，考虑反演级数（4）相邻两项的比值$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1} y^{n+1}}{b_n y^n} = y \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0}{0}$，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$存在以下三种情况：1）$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$；2）$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}} = 0$；3）$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} \neq 0$。

对于第二种情况，会导致除$y = 0$以外 y 取其他值时级数发散，因此予以排

除。故综合第一种和第三种情况可得$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$存在。

有了以上引理，现对级数实根存在的范围进行分析。首先需要证明如下引理：

引理 2：若$y\to(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}, \frac{dy}{dx}\to 0$

证明:当 $y>|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|$ 时$x=h(y)$的相邻两项级数之间的比值大于 1，即$\lim_{n\to\infty}|\frac{b_{n+1}y^{n+1}}{b_n y^n}|>1$，因此$x=\infty$。另一方面，$y<|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|$时，x 与 y 一一对应且满足$f(x)=y$ 因此，$y\to(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}$，$\frac{dx}{dy}\to\infty$，故$\frac{dy}{dx}\to 0$

现在，考虑级数式子（1）的导函数：

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x^1+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \quad (5)$$

结论 1：$f'(x)$的一个非零的实根为$x_1=f^{-1}((\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$

证明：由引理 2，可知$f'(x)$的一个的实根为$x_1=f^{-1}((\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$。现假设存在$f'(x)$的实根满足$0<x_2<x_1$（不妨假设$0<f^{-1}((\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$），则$f'(x_2)=\frac{dy}{dx}|_{x=x_2}=0$，因此$\frac{dx}{dy}|_{y=f(x_2)}=\infty$，因此$x=h(y)$在$y=f(x_2)<(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}$处为断点，矛盾。故$x_1=f^{-1}((\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$为$f'(x)=0$的最小实根。

结论 2：考虑 $y=f(x)$ 的反演级数式（4），当 $y\in(-|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}|,|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}|)$，$h(y)$收敛且单调。

证明：1)首先需证明，当$y\in(-|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}|,|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}|)$，级数$x=h(y)$收敛：

① 若 $0<\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=p$，则当 $y\in[0,(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$ 时，由极限定义，存在正数$\varepsilon,\tau<p$及正整数n_0，满足$n\ge n_0$时$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-p\right|<\varepsilon<1-\tau$，因此，易知对任意$y\in[0,(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$ 至少 $n\ge n_0$ 时 $b_n y^n$ 与 $b_{n+1}y^{n+1}$正负符号相同，并且至少$n\ge n_0$时相邻两项级数之间的比值大于 0 小于 1，即 $0<\frac{b_{n+1}y^{n+1}}{b_n y^n}<1-\tau$，因此级数 $x=h(y)$收敛。

当 $y\in(-(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1},0)$时，易知存在正数$\varepsilon,\tau<p$及正整数$n_1$，满足$n\ge n_1$时$b_n y^n$与$b_{n+1}y^{n+1}$正负符号相反，即$h_{n_1+}(y)=b_{n_0}y^{n_0}+b_{n_0+1}y^{n_0+1}+b_{n_0+2}y^{n_0+2}+\ldots$为交错级数，并且少$n\ge n_1$时相邻两项级数之间的比值大于 0 小于 1，即$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-p\right|<\varepsilon<1-\tau$，由莱布尼茨判别法[4]知级数$x=h(y)$收敛。因此若$0<\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=p<1$，$y\in(-$

$|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|, |(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|)$时$h(y)$收敛。

② 若$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=p<0$，则当$y\in[(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1},0)$时，由极限定义，由极限定义，存在正数$\varepsilon,\tau<p$及正整数$n_0$，满足$n\geq n_0$时$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-p\right|<\varepsilon<1-\tau$，因此，易知对任意$y\in[0,(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$至少$n\geq n_0$时$b_n y^n$与$b_{n+1}y^{n+1}$正负符号相同，并且少$n\geq n_0$时相邻两项级数之间的比值大于 0 小于 1，即$0<\frac{b_{n+1}y^{n+1}}{b_n y^n}<1-\tau$，因此级数$x=h(y)$收敛。

当$y\in[0,-(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$时，由极限定义，存在正数$\varepsilon,\tau$及正整数$n_0$，满足$n\geq n_0$时$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-p\right|<\varepsilon<1-\tau$，因此，易知对任意$y\in[0,-(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1})$在$n\geq n_0$时$b_n y^n$与$b_{n+1}y^{n+1}$正负符号相反，即$h_{n_1+}(y)=b_{n_0}y^{n_0}+b_{n_0+1}y^{n_0+1}+b_{n_0+2}y^{n_0+2}+\dots$为交错级数，并且$n\geq n_1$时相邻两项级数之间的比值大于 0 小于 1，即$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-p\right|<\varepsilon<1-\tau$由莱布尼茨判别法知级数$x=h(y)$收敛。因此若$-1<\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=p<0$，$y\in(-|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|, |(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|)$时$h(y)$收敛。

综上，当$y \in (-|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|,|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|)$，$h(y)$收敛。

2)然后证明，当$y \in (-|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|,|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|)$，$h(y)$单调：

若 $h(y)$ 在该区间上不单调，则存在 $y^* \in (-|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|,|(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n})^{-1}|)$，满足$\frac{dx}{dy}|_{y=y^*}=0$，

因此$\frac{dy}{dx}|_{x=f^{-1}(y^*)}=\infty$，这说明$f(x)$在收敛域内有断点，矛盾。

计算例子：考虑二次方程$y=ax+x^2$，其拉格朗日反演级数为•：$x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a^3}y^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\frac{y^n}{a^{2n-1}}+\ldots$，即$b_n=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\frac{1}{a^{2n-1}}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}(-1)\frac{(2n)(2n-1)}{n(n+1)a^2}=\frac{-4}{a^2}$，故当$y\in[0,\frac{a^2}{4})$时$y(x)$单调，当$y=-\frac{a^2}{4}$时，$x=-\frac{a}{2}$而这正是$\frac{dy}{dx}=a+2x$的根。

2.首项系数为零的级数方程单调区间及其导数的实根

现在考虑在式子（1）中令$a_1=0$时的情况，即形如级数：

$$y=a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,x\in\Theta\ (\Theta\text{为该级数收敛域})\qquad(6)$$

的单调区间。

不妨设$a_2>0$，则该级数可转变为如下两个级数：

$$y^{\frac{1}{2}}=x(a_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a_3}{a_2}x^1+\frac{a_4}{a_2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_2}x^{n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}}\qquad(7)$$

和

$$y^{\frac{1}{2}}=-x(a_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a_3}{a_2}x^1+\frac{a_4}{a_2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_2}x^{n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

分别对以上两式求反演级数，根据反演公式（2），可得

$$x=(y^{\frac{1}{2}})\frac{1}{(a_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a_3}{a_2}x^1+\frac{a_4}{a_2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_2}x^{n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

及

$$x=(-y^{\frac{1}{2}})\frac{1}{(a_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a_3}{a_2}x^1+\frac{a_4}{a_2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_2}x^{n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

令 $\psi(x)=(a_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{a_3}{a_2}x^1+\frac{a_4}{a_2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_2}x^{n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}}$，则可得关于$y^{\frac{1}{2}}$的两个级数：

$$x=h_1(y^{\frac{1}{2}})=b_1'y^{\frac{1}{2}}+b_2'y^{\frac{2}{2}}+b_3'y^{\frac{3}{2}}+\ldots+b_n'y^{\frac{n}{2}}+\ldots b_1'=(a_2)^{-\frac{1}{2}}>0 \quad (10)$$

以及

$$x=h_1\left(-y^{\frac{1}{2}}\right)=-b_1'y^{\frac{1}{2}}+b_2'y^{\frac{2}{2}}-b_3'y^{\frac{3}{2}}+\ldots+(-1)^n b_n'y^{\frac{n}{2}}+\ldots \quad (11)$$

以上两式中b_n'由式(3)确定。由结论 2，当$0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'}$时，取$y^{\frac{1}{2}}=(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'})^{-1}$；即$y=(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'})^{-2}$；当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'}<0$时，取$y^{\frac{1}{2}}=-(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'})^{-1}$，仍为$y=(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'})^{-2}$，故其包含零点的一个单调区间为$y\in(-|\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'}\right)^{-2}|,|\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}'}{b_n'}\right)^{-2}|)$。

考虑级数（6）的导数：

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=a_2x^1+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots \quad (12)$$

则其非零实根为$x=f^{-1}\left(\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-2}\right)$。

3 级数方程零点附近的单调区间及实根求解

综合以上两节论述，可知，对于任意给定的不含常数项的级数方程：

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots \tag{13}$$

若其存在拉格朗日反演级数形如：

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\dots+b_ny^n+\dots \tag{14}$$

则在$a_1\neq0$的条件下：

1）其单调区间为$y\in\left(-\left|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}\right|,\left|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1}\right|\right)$。

2）其非零实根为可由级数：

$$F(x)=\int y\,dx=\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\frac{1}{4}a_3x^4+\dots+\frac{1}{n}a_nx^n+\dots \tag{15}$$

的反演级数确定。

若$a_1=0$：

1）其单调区间为$y\in\left(-\left|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-2}\right|,\left|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-2}\right|\right)$。

2）其非零实根为可由级数：

$$F(x)=\int y\,dx=\frac{1}{3}a_2x^3+\frac{1}{4}a_3x^4+\dots+\frac{1}{n}a_nx^n+\dots \tag{16}$$

的反演级数确定。

参考文献

[1] 菲赫金哥尔茨. 《微积分学教程》[M].北京：高等教育出版社

[2] 谢彦麟. 《多项式理论研究综述》[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社

[3] 马二军,张永明,李秀淳. 渐进幂级数的反演[J]. 《河北师范大学学报》,2001年.04期

[4] 彭晓珍，严钦容. 关于交错级数的一个新的审敛准则［Ｊ］． 大学数学，２００４，２０（３）：１２０－１２３．